# Partiel 2022: Physique Atomique et Moléculaire

mardi 08 novembre 2022

-- TOUT DOCUMENT ET OBJET CONNECTÉ INTERDIT –

---

## 1. Question de cours

Expliquer succinctement l'origine de la structure hyperfine. Est-ce qu'il existe une contribution pour des états avec $l = 0$ et si oui, laquelle ?

Décrire brièvement l'expérience de Stern-Gerlach, et détailler pourquoi le résultat obtenu est incompatible avec des moments magnétiques dus au moments cinétiques orbitalaires.

Effet Zeeman : pour un atome d'hydrogène plongé dans un champ magnétique uniforme selon $\boldsymbol{e}_z$, rappeler les divers moments magnétiques impliqués dans le cas général ainsi que le hamiltonien de l'énergie d'interaction. Appliquer au cas spécifique de l'état fondamental et discuter de possible(s) simplification(s).

## 2. Corrections fines au spectre de l'atome d'hydrogène

Le modèle non relativiste de l'atome d'hydrogène est l'opérateur Hamiltonien suivant qui décrit la dynamique d'un électron autour d'un proton : $H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$. On rappelle que son spectre discret est donné par $H_0\Psi_{n,l,m} = E_n^{(0)}\Psi_{n,l,m}$, avec $n \in N^{*+}$, $0 \leq l \leq n-1$ et $-l \leq m \leq +l$. Les fonctions propres sont $\Psi_{n,l,m}(\vec{r}) = R_{n,l}(r)Y_l^m(\theta,\varphi)$ et les niveaux d'énergies : $E_n^{(0)} = -\frac{E_I}{n^2}$ avec $E_I = \frac{me^4}{2\hbar^2(4\pi\varepsilon_0)^2} = 13{,}6$ eV. Dans cet exercice, on s'intéresse aux corrections relativistes aux niveaux d'énergie, appelées 'structure fine'. On utilisera la théorie des perturbations au 1$^{er}$ ordre.

a. En relativité restreinte, la relation $\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = (mc)^2$ relie l'énergie $E$ et l'impulsion $p$ d'une particule libre de masse $m$. Dans le régime de basse impulsion $p << mc$ déduire la relation $E = mc^2 + \frac{p^2}{2m} + C_{mv}p^4 + O(p^6)$ avec une constante $C_{\text{mv}}$ à expliciter. On rappelle le développement en série de Taylor $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)x^2 + O(x^2)$, avec $x<<1$. Oubliant la constante $mc^2$, quelle correction $W_{\text{mv}}$, cela suggère-t-il à l'énergie cinétique de l'opérateur $H_0$ ?

b. Expliquer qualitativement pourquoi les effets relativistes induisent des fluctuations sur la position de l'électron à l'échelle $\hbar/mc$, autrement appelée 'longueur d'onde de Compton'.

c. Une autre correction au Hamiltonien $H_0$, dite de Darwin et due à la non-localité de l'interaction entre l'électron et le champ coulombien dû au noyau, est donnée par $W_D = \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\Delta U(r)$ avec $U(r)$ la partie potentielle de $H_0$. A l'aide de la relation d'analyse vectorielle $\Delta\left(-\frac{1}{r}\right) = 4\pi\delta(\vec{r})$, montrer que $W_D$ peut se mettre sous la forme $W_D = C_D\left|\Psi_{n,o,o}(0)\right|^2$ avec une constante $C_D$ à expliciter.

**T.S.V.P.**

d. Les termes de perturbation $W_{mv}$ et $W_D$ induisent une correction $E_{n,l,m} = E_n^{(0)} + \Delta E_{n,l,m}$ sur les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène. Pour les états $l = 0$, calculer les quantités $\frac{\langle\psi_{n,0,0}|W_{mv}|\psi_{n,0,0}\rangle}{E_n^{(0)}}$ puis $\frac{\langle\psi_{n,0,0}|W_D|\psi_{n,0,0}\rangle}{E_n^{(0)}}$ en fonction de $n$ et de $\alpha = \frac{e^2}{(4\pi\varepsilon_0)\hbar c} \sim \frac{1}{137}$. On pourra exprimer $p^4$ à partir de $H_0$, 1/r et 1/r$^2$ et faire usage de $\left\langle\psi_{n,0,0}\middle|\frac{1}{r}\middle|\psi_{n,0,0}\right\rangle = \frac{1}{a_0 n^2}$, $\left\langle\psi_{n,0,0}\middle|\frac{1}{r^2}\middle|\psi_{n,0,0}\right\rangle = \frac{2}{a_0^2 n^3}$, $\left|\Psi_{n,o,o}(0)\right|^2 = \frac{1}{\pi a_0^3 n^3}$ avec $a_0$ le rayon de Bohr $a_0 = \frac{(4\pi\varepsilon_0)\hbar^2}{me^2}$. En déduire la correction relative $\frac{\Delta E_{n,0,0}}{E_n^{(0)}}$.

e. Application numérique : donner l'ordre de grandeur de $\Delta E_{n,0,0}$.

**3. Effet Stark : étude de la désexcitation de l'état *2s* de l'atome d'hydrogène**

Un processus de collision entre atomes d'hydrogène et particules chargées produit des atomes d'hydrogène dans l'état *2s*, que l'on désire détecter. L'état *2s* est un état métastable de durée de vie $\tau_{2s}$ = 0,14 *s*, qui peut être considérée comme infinie à l'échelle de cette expérience (vitesses de l'ordre de 10 $km\ s^{-1}$, distances à parcourir de l'ordre de 10 *cm*). Afin d'utiliser des méthodes optiques de détection, on applique un champ électrique statique afin de mélanger l'état *2s* avec l'état *2p* voisin, de durée de vie beaucoup plus courte $\tau_{2p}$ = 1,6 $10^{-9}$ *s*. L'état *2p*, ou l'état mélangé (superposition de l'état *2s* et de l'état *2p*), se désexcite alors par émission de la raie Lyman $\alpha$ à 121,6 *nm*. Les photons émis peuvent alors être détectés par un photomultiplicateur.

On se propose d'étudier le mécanisme de mélange par effet Stark des états *2s* et *2p* qui seront supposés dégénérés en l'absence de champ extérieur (influence négligeable du spin électronique) et décrits par le hamiltonien $H_0$. On applique un champ électrique statique $\boldsymbol{\varepsilon}$, colinéaire à l'axe $Oz$, sur la multiplicité $n$ = 2. On rappelle que le hamiltonien Stark est donné par $W_S = -\boldsymbol{D}.\boldsymbol{\varepsilon} = qz\varepsilon$.

a. Donner les expressions littérales des éléments de la matrice $H_0 + W_S$ pour la multiplicité $n$ = 2. Calculer $\hbar\omega_S$ pour $\varepsilon$ = 100 $V\ m^{-1}$ après avoir posé $\hbar\omega_S = |\langle 2s|W_S|2p, m_l = 0\rangle|$.

On rappelle : $cos\,\theta\,|Y_l^m\rangle = \sqrt{\frac{l^2-m^2}{4l^2-1}}\,|Y_{l-1}^m\rangle + \sqrt{\frac{(l+1)^2-m^2}{4(l+1)^2-1}}\,|Y_{l+1}^m\rangle$

$$r\left|R_{n,l}\right\rangle = -\frac{3}{2}a_0 n\sqrt{n^2-l^2}\left|R_{n,l-1}\right\rangle - \frac{3}{2}a_0 n\sqrt{n^2-(l+1)^2}\left|R_{n,l+1}\right\rangle$$

b. En déduire les valeurs propres du hamiltonien $H_0 + W_S$ ainsi que les états propres associés en considérant une diagonalisation par bloc de la matrice trouvée en 1.

c. On suppose que le taux de décroissance radiative $\Gamma = \tau^{-1}$ d'un état 'mélangé' $|\Psi\rangle = \sum_i a_i\,|\phi_i\rangle$ est donné par $\Gamma = \sum_i |a_i|^2\,\Gamma_i$, avec $\Gamma_i$ le taux de décroissance de l'état$|\phi_i\rangle$. Indiquer le taux de décroissance radiative des états trouvés en 2. et le comparer à celui de l'expérience. Commenter.